

## **Πως και γιατί μελετάμε Μαθηματικά**

Γράφει ο Φάνης Μαργαράνης, Μαθηματικός, συγγραφέας

### **A. Μέρος – Τι είναι τα μαθηματικά**

Σας λένε: «Τα μαθηματικά είναι η απόλυτη αλήθεια, δεν κάνουν λάθος ποτέ, δεν παρουσιάζουν καμιά αντίφαση. Είναι ένα στέρεο ατσάλινο οικοδόμημα στο οποίο δεν μπορεί να υπάρξει ποτέ κανένα αδιέξοδο και καμιά διαφωνία».

Σωστά; Και όμως, ΛΑΘΟΣ!

Το 1972 ο Morris Kline έγραψε: «Τα μαθηματικά δεν είναι μια δομή από ατσάλι η οποία βασίζεται πάνω στα θεμέλια της αντικειμενικής πραγματικότητας, αλλά ένας ιστός αράχνης που πάλλεται μαζί με άλλες σκέψεις στους μερικά μόνο εξερευνησίμους χώρους του ανθρώπινου μυαλού».

Τα μαθηματικά είναι μια ανθρώπινη κατασκευή, όπως και τόσες άλλες, γι' αυτό και μπορεί να γίνει -υπό όρους- αντιληπτή από τον καθένα. Με τον ίδιο τρόπο που θα μπορούσε ο οποιοσδήποτε να παίξει μουσική ή ποδόσφαιρο, θα μπορούσε (με την κατάλληλη προσπάθεια και επιμονή) να μάθει μαθηματικά. Βέβαια, πόσο καλά θα μπορέσει να μάθει μαθηματικά, αν θα... σολάρει σε κάποια μαθηματική συναυλία ή αν θα σκοράρει σε κάποιο μαθηματικό Champions League έχει να κάνει φυσικά με κάποιο ταλέντο, αλλά κυρίως εξαρτάται από σκληρή προπόνηση, από τους δασκάλους του /της, την ψυχολογία και την προσωπικότητά του / της.

Τα μαθηματικά καμιά φορά εμφανίζονται στα βιβλία μας αυστηρά και στριφνά, έως και αποκρουστικά. Η αλήθεια, όμως, είναι ότι αποτελούν το αποτέλεσμα μιας μακρόχρονης ανακαλυπτικής διαδικασίας, στην οποία σπουδαίο ρόλο έχει παίξει η διαίσθηση, η εικασία, η φαντασία και η εξερεύνηση. Μετά από τη διόρθωση πολλών λαθών σε βάθος αιώνων, παρουσιάζονται σε εμάς σαν αποστειρωμένο οικοδόμημα, όμως καθόλου δεν έχουν γεννηθεί με αυτό τον τρόπο. Και έτσι, λοιπόν, πρέπει να τα αντιμετωπίσουμε: Όχι ως ένα αποστειρωμένο σύνολο πληροφοριών, αλλά ως ένα ανθρώπινο, ζωντανό δημιούργημα, με μια πορεία ζωής γεμάτη από λάθη και αντιφάσεις, όπως η πορεία καθενός από εμάς. Πού ξέρετε; Μπορεί από τα μαθηματικά λάθη να μάθουμε να αποφεύγουμε τα δικά μας!

Αν δούμε με αυτό το... «μάτι» τα μαθηματικά, θα εξανθρωπιστούν, θα έρθουν πιο κοντά στη δική μας πραγματικότητα. Τα θεωρήματα, οι ορισμοί, οι αποδείξεις έχουν την ίδια αξία με τα λάθη, με τη διερεύνηση, με τη φαντασία, με μια ιδέα που μπορεί –ή και όχι, αυτό δεν έχει πάντα σημασία- να μας οδηγήσει σε νέες ανακαλύψεις. Ο μοναδικός τρόπος να αγαπήσουμε και να μάθουμε τα μαθηματικά είναι να καταλάβουμε την ανθρώπινη, ζωντανή φύση τους.

### **B' μέρος – Γιατί μαθαίνουμε μαθηματικά;**

«Για να μην μας κοροϊδέψει ο μπακάλης» μου είπαν κάποτε, το πίστεψα, με στοίχειωνε μια ζωή. Έχω ακούσει κι άλλες απαντήσεις, όπως: «επειδή είναι χρήσιμα» ή «επειδή πρέπει να τα εφαρμόζουμε στην οικονομία, την πολιτική, την επιστήμη, όλους τους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας».

Τα παραπάνω δεν μπορούμε να τα πολυπάρουμε στα σοβαρά, γιατί πλέον δεν μπορεί να μας κοροϊδέψει ο μπακάλης και – κακά τα ψέματα- στην καθημερινότητά μας δεν είναι και ιδιαίτερα χρήσιμα τα μαθηματικά. Εκτός αν κάποιος δουλεύει στη NASA τα απογεύματα, οπότε το πράγμα αλλάζει. Βέβαια ως υποψήφιοι που δίνουν μαθηματικά στις πανελλήνιες οπωσδήποτε θα χρειαστείτε τα μαθηματικά ως αυριανοί φοιτητές, πτυχιούχοι και επαγγελματίες. Αλλά και πάλι, όχι σε τέτοιο συγκλονιστικό βαθμό ώστε να δικαιολογείται όλος αυτός ο ντόρος, όλη αυτή η οδυνηρή εμπειρία της μάθησης των μαθηματικών. Τί συμβαίνει λοιπόν; Γιατί μαθαίνουμε τόσα πράγματα όταν το πιθανότερο είναι στη ζωή μας να χρησιμοποιούμε κυρίως τις τέσσερεις αριθμητικές πράξεις;

## **Υπάρχουν 3 βασικές κατηγορίες σκοπών για τους οποίους μαθαίνουμε μαθηματικά:**

I. Πρακτικοί σκοποί: Για να είμαστε ειλικρινείς, ακόμα κι αν δεν μας κοροϊδεύει ο μπακάλης, χρειαζόμαστε κάποια βασικά μαθηματικά με τα οποία μπορούμε να επεξεργαζόμαστε τη ζωή γύρω μας, να αναλύουμε γεγονότα που συμβαίνουν δίπλα μας.

II. Μορφωτικοί σκοποί: Υπάρχει αυτό που λέμε «διανοητική καλλιέργεια». Το σύνολο, δηλαδή, των γνωρισμάτων του ατόμου που συμβάλουν στο «επίπεδό» του, στη συνολική του «μόρφωση». Έτσι, άμεσα ή έμμεσα, τα μαθηματικά συμβάλουν στη μεταφορά αυτών των γνωρισμάτων σε άλλους τομείς, σε άλλες καταστάσεις της προσωπικής, κοινωνική ή επαγγελματικής ζωής στις οποίες είναι πολύτιμα. Για παράδειγμα:

α. Η ανάπτυξη της ικανότητας για καθαρή και στοχευμένη σκέψη.

β. Η ικανότητα διαμόρφωσης κρίσης και λογικής σκέψης.

γ. Η ικανότητα αναγνώρισης λογικών σχέσεων μεταξύ ανεξάρτητων γεγονότων.

δ. Η γενική ικανότητα της αφαιρετικής σκέψης αλλά και της γενίκευσης.

ε. Η απόκτηση πολύτιμων διανοητικών στάσεων, που δύσκολα κατακτούνται, όπως: πειθαρχία, ακρίβεια, σαφήνεια, υπομονή, επιμονή.

στ. Η ικανότητα κατάστρωσης σχεδίου, στρατηγικής για την επίλυση ενός προβλήματος (το οποίο σήμερα είναι το εμβασμόν μιας επιφάνειας, αύριο όμως μπορεί να είναι κάποιο επαγγελματικό, οικογενειακό πρόβλημα κλπ).

III. Πολιτισμικοί σκοποί: Εδώ έχουμε διανοητικούς, αισθητικούς, πνευματικούς σκοπούς. Τα μαθηματικά είναι ασφαλώς πολιτισμικό αγαθό και με τη μελέτη τους αναπτύσσουμε πολύπλευρα την προσωπικότητά μας. Για παράδειγμα μαθαίνουμε:

α. Να αναγνωρίζουμε την ομορφιά, το ωραίο, το καλαίσθητο.

β. Να αναζητάμε και να αναγνωρίζουμε την τελειότητα.

γ. Να αναγνωρίζουμε την αξία της οργάνωσης, της τάξης, της αρμονίας.

Φυσικά για εμάς τα μαθηματικά συνδέονται άρρηκτα με ένα ιδιαίτερα σημαντικό σκοπό, αυτόν της εισαγωγής στο πανεπιστήμιο της επιλογής μας. Αυτό, ίσως, επισκιάζει όλα τα παραπάνω, όμως μονάχα μέχρι να ολοκληρωθούν οι πανελλήνιες εξετάσεις.

## **Γ' Μέρος – Πώς αφομοιώνουμε τα μαθηματικά;**

1. Η μάθηση ξεκινά στην τάξη. Το πρώτο βήμα που κάνουμε είναι η σύλληψη. Δεχόμαστε ένα ερέθισμα και στη συνέχεια το εγγράφουμε στη μνήμη μας. Η λήψη του ερεθίσματος είναι ανάλογη με την προσοχή που επιδεικνύουμε τη δεδομένη στιγμή, με την αντίληψη που έχουμε ήδη αναπτύξει, αλλά και με την ιδιοσυγκρασία μας. Εν ολίγοις, στο μάθημα γίνεται η μισή δουλειά!

2. Στη συνέχεια πρέπει το αρχικό ερέθισμα να εντυπωθεί για τα καλά στη μνήμη μας. Αυτή είναι η φάση της απόκτησης. Σπουδαία επιμέρους διαδικασία της φάσης αυτής είναι η εξάσκηση μέσω της επανάληψης (ουσιαστικά μέσω των ασκήσεών μας) ώστε να διατηρούνται «επίκαιρα» στη μνήμη μας όσα έχουμε κατανοήσει. Κάνουμε δηλαδή “copy” την πληροφορία, ώστε να την περάσουμε στο σκληρό μας δίσκο.

3. Ακολουθεί η φάση της συγκράτησης. Εδώ κάνουμε “paste” και αποθηκεύουμε την πληροφορία στη μακροπρόθεσμη μνήμη, στο... σκληρό δίσκο του εγκεφάλου. Ο καθένας μας λειτουργεί κάπως διαφορετικά σε αυτή τη φάση. Κοινή αναφορά είναι η επιμονή με τη δημιουργική εξάσκηση, ενώ σημαντικό ρόλο παίζει η απομνημόνευση, η φαντασία, τα οπτικά σχήματα, οι εικόνες, τα χρώματα. Είναι ένα στοίχημα να βρείτε τους δικούς σας τρόπους μάθησης!

4. Η φάση της ανάκλησης και γενίκευσης. Κατά την ανάκληση επανέρχεται η πληροφορία από τη μνήμη μας και τη χρησιμοποιούμε ξανά. Όσο καλύτερα έχουμε δουλέψει ως τώρα, τόσο πιο εύκολο θα είναι να ανακληθεί η πληροφορία. Κατά τη γενίκευση εφαρμόζουμε την ίδια πληροφορία σε ένα εντελώς καινούριο περιβάλλον, συνθέτουμε, δημιουργούμε καινούριους δρόμους. Δηλαδή αυτό που τελικά απαιτείται για να γράψει κανείς πολύ καλά στις εξετάσεις.

5. Η φάση της εκτέλεσης και επανατροφοδότησης. Εφόσον εκτελείται μια ενέργεια, τότε είμαστε σίγουροι ότι έχει αφομοιωθεί. Αν λύσουμε μια δευτεροβάθμια εξίσωση, σημαίνει ότι ξέρουμε να λύνουμε όλες τις αντίστοιχες δευτεροβάθμιες εξισώσεις. Οπότε έτσι «πατάμε» στη γνώση αυτή, επιστρέφουμε στην τάξη και τη μελέτη μας και τροφοδοτούμε νέες γνώσεις, παραπέρα μάθηση.

### **Δ' μέρος – Πώς μελετάμε μαθηματικά;**

Συχνό ερώτημα είναι: «Πώς γίνεται στην πράξη η παραπάνω διαδικασία;». Ο καθένας από εμάς είναι διαφορετικός από το διπλανό του. Άρα ο καθένας έχει τα δικά του χαρακτηριστικά, τις δικές του συνήθειες και ιδιορρυθμίες. Η μελέτη του ίδιου αντικειμένου ανάμεσα σε δύο άτομα δεν μπορεί να είναι ποτέ η ίδια. Υπάρχουν, όμως, βασικά σημεία στα οποία μπορούμε να πατήσουμε όλοι:

1. Προσοχή στην τάξη. Είπαμε: στην τάξη γίνεται η μισή δουλειά. Σημειώνουμε παρατηρήσεις, αξιοπρόσεκτα σημεία. Φροντίζουμε το τετράδιό μας να είναι.. δικό μας! Να έχει την προσωπικότητά μας παντού. Σημάδια, κώδικες, σύμβολα, post it, σελιδοδείκτες, υπογραμμίσεις, highlighter. Οτιδήποτε μας βολεύει και μας βοηθά είναι αξιοποιήσιμο. Εξυπακούεται ότι τίποτε από αυτά δεν έχει σημασία αν δεν είμαστε συγκεντρωμένοι στη συζήτηση που γίνεται κατά τη διάρκεια του μαθήματος.

2. Δουλειά στο σπίτι. Ανοίγουμε το βιβλίο και το τετράδιο (αλλιώς δε γίνεται!).  
**ΔΕΝ ΒΙΑΖΟΜΑΣΤΕ ΝΑ ΛΥΣΟΥΜΕ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΑΝ ΜΗΧΑΝΑΚΙΑ!**

i. Πρώτα θυμόμαστε τι συζητούσαμε στην τάξη. Διαβάζουμε τον τίτλο, συνειδητοποιούμε ποιο είναι το αντικείμενο της ενότητας που μελετάμε.

ii. Ξεκινάμε πάντα από τις ασκήσεις που είχαμε λύσει την προηγούμενη φορά. Ξαναδιαβάζουμε τα πιο σημαντικά σημεία, μελετάμε πιο επίμονα τα λάθη μας και τις παρατηρήσεις που έγιναν. Επιμένουμε στην επίλυση εκείνων που δεν είχαν «βγει» την προηγούμενη φορά. Προσηλωνόμαστε στην ουσιαστική τους κατανόηση, δεν τις προσπερνάμε, δεν αφήνουμε κενά. Αν συνεχίζουν να υπάρχουν απορίες, τις σημειώνουμε για να ρωτήσουμε τον καθηγητή.

iii. Θεωρία. Επί της ουσίας κάθε λύση προβλήματος βρίσκεται μέσα στη θεωρία μας. Αντιλαμβανόμαστε τους ορισμούς και τις προτάσεις. Αρχικά ας μην τα μάθουμε απ' έξω, δεν είναι αυτό το πιο σημαντικό. Σιγά σιγά, θα γίνονται κτήμα μας μέσω της εφαρμογής τους, οπότε στο τέλος της μελέτης μας θα επιδιώξουμε να τα αποστηθίσουμε.

iii. Διάβασμα των εφαρμογών που κάναμε στην τάξη. Ιδανικό είναι να ξαναλύσουμε τις εφαρμογές αυτές, να μελετήσουμε τις λύσεις, τα βήματα, το σκεπτικό πίσω από κάθε λύση. Αν προκύπτουν απορίες, σημειώνουμε και ρωτάμε τον καθηγητή μας.

iv. Ξεκινάω να λύνω τις ασκήσεις που έχω. Δεν τις ξεπετάω! Επιμένω σε κάθε μία ξεχωριστά, αναζητώ τρόπους λύσης, συμβουλευόμαι τις λυμένες εφαρμογές. Κάθε άσκηση αποτελεί ένα προσωπικό στοίχημα. Είναι ένα βήμα που μας φέρνει πιο κοντά στο πανεπιστήμιο.

**Ειδικά για την επίλυση των ασκήσεων, σοφά είναι τα λόγια του Πολγα, ο οποίος περιέγραψε τα στάδια επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος ως εξής:**

- Κατανόηση του προβλήματος  
Ποιος είναι ο άγνωστος; Ποια είναι τα δεδομένα; Κάνω ένα σχήμα, ξεχωρίζω τα διαφορετικά μέρη της υπόθεσης, καταγράφω συνθήκες, υποθέσεις.
- Καταστρώνω ένα σχέδιο  
Βρίσκω τη σχέση ανάμεσα στα δεδομένα και τα ζητούμενα. Μήπως έχω ξαναδεί κάπου το πρόβλημα; Μήπως το έχω δει σε ελαφρώς διαφορετική μορφή; Μπορώ να χρησιμοποιήσω κάτι από το γνωστό μου πρόβλημα; Από τη μεθοδολογία του; Από το αποτέλεσμά του; Μήπως γνωρίζω κάποια πρόταση

που φαίνεται να σχετίζεται; Εν τέλει θα πρέπει να μπορέσω να καταστρώσω ένα σχέδιο επίλυσης του προβλήματος.

- Βάζω σε εφαρμογή το σχέδιο  
Ελέγχω κάθε βήμα ότι είναι σωστό και ότι κάθε μου σκέψη είναι αποδεδειγμένη.
- Κοιτάζω προς τα πίσω και μετά προς τα μπρος  
Ελέγχω το αποτέλεσμα. Στέκει; Έχει λογική; Μήπως μπορούσα να εξάγω το αποτέλεσμα διαφορετικά; Τώρα, που έχει λυθεί, μπορώ να το αξιοποιήσω για την επίλυση άλλων προβλημάτων;

Αν δεν τα καταφέρνω σε μια άσκηση, σημειώνω να τη συζητήσουμε στην τάξη. Προσοχή! Φέρνω μαζί τις δοκιμές που έκανα, τα σχέδια μου που απέτυχαν. Μπορεί κάποιο από αυτά να ήταν πολύ κοντά στο αποτέλεσμα! Εξάλλου από τις αποτυχίες μας μαθαίνουμε!

3. Η επιστροφή στην τάξη. Λύνω απορίες, συζητάω σκέψεις κλπ. Καλύπτω τα κενά, προχωράω παρακάτω.

### Παράπλευρες σημειώσεις για τη μελέτη στο σπίτι:

- Αν νιώσουμε κούραση κάνουμε ένα μικρό διάλειμμα για αποφόρτιση. Στο διάλειμμα δεν βλέπουμε τηλεόραση, ούτε διαβάζουμε κάτι άλλο. Χαλαρώνουμε και ανακτούμε δυνάμεις. Εξυπακούεται ότι στόχος είναι να μην κουραζόμαστε εύκολα και να μη χάνουμε περιττό χρόνο σε διαλείμματα.
- Μπορούμε να εναλλάσσουμε τα μαθήματα αν νιώθουμε ότι μας βοηθά, αλλά γενικά καλό είναι να αποφεύγεται. Ο απαιτούμενος βαθμός συγκέντρωσης δεν επιτυγχάνεται εύκολα και οι συχνές αλλαγές τον αποδυναμώνουν.
- Ο χώρος όπου μελετάμε πρέπει να είναι φωτεινός και οικείος, να νιώθουμε άνετα. Προφανώς να έχει ησυχία και να μην ευνοεί τις περισπάσεις. Επίσης καλό είναι να έχουμε τη θεωρία ή τα τυπολόγια μας κολλημένα στον τοίχο για άμεση πρόσβαση.
- Σωστή στάση μελέτης. Όχι διάβασμα στο κρεβάτι. Η σπονδυλική στήλη πρέπει να είναι σε όρθια θέση.
- Εξασφαλίζουμε ότι ξεκουραζόμαστε αρκετά και δεν χάνουμε χρόνο από τον ύπνο ή το διάβασμά μας σε κουταμάρες.
- Συχνές επαναλήψεις της ύλης λειτουργούν καθοριστικά για την αφομοίωσή της. Αξιοποιούμε το τελευταίο μισάωρο της ημέρας για μια γρήγορη επανάληψη. Επίσης το Σαββατοκύριακο κάνουμε μια ανασκόπηση της εβδομάδας. Πριν το επαναληπτικό διαγώνισμα εμβαθύνουμε σε όλη την προηγούμενη ύλη.

Σε κάθε περίπτωση, οι καθηγητές σας είμαστε εδώ για εσάς. Κάθε πρόβλημα λύνεται, αρκεί να το μοιραστείτε μαζί μας. Μη διστάσετε ποτέ να απευθυνθείτε σε εμάς για να ξεπεράσουμε μαζί κάθε πρόβλημα. Ο δικός μας ρόλος ολοκληρώνεται όταν γινόμαστε δρόμος για να πετύχετε τα όνειρά σας.

### Βιβλιογραφία

- Foulin, J.-N., & Mouchon, S. (2002). *Εκπαιδευτική Ψυχολογία*. Αθήνα: Μεταίχμιο.
- Kline, M. (1980). *Mathematics, The loss of certainty*. New York: Oxford University Press.
- Kline, M. (1990). *Γιατί δεν μπορεί να κάνει πρόσθεση ο Γιάννης. Η αποτυχία των μοντέρνων μαθηματικών*. Θεσσαλονίκη: ΒΑΝΙΑΣ.
- Polya, G. (1957). *How to Solve it?* Princeton University Press.
- Siety, A. (2003). *Μαθηματικά, ο αγαπημένος μου φόβος*. Αθήνα: Σαββάλας.
- Whitaker, T. (2012). *Ο καλός δάσκαλος. Σε τι ξεχωρίζει*. Αθήνα: Πατάκη.
- Ανδριανός, Η., & Καρύδης, Σ.(επιμ.) (2017). *Οι θετικές επιστήμες ως πολιτισμικό αγαθό. Προσεγγίσεις των Θετικών επιστημών εκτός Αναλυτικού Προγράμματος*. Θεσσαλονίκη: Ροπή.
- Βοσνιάδου, Σ. (2005). *Η Ψυχολογία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Gutenberg.
- Καλφοπούλου, Κ. (2017). *Ο Γιάννης που αγάπησα. Ιστορίες ανατροπής στην τάξη των μαθηματικών*. Αθήνα: Τραυλός.
- Κολέζα, Ε. (2017). *Θεωρία και Πράξη στη διδασκαλία των μαθηματικών*. Αθήνα: Gutenberg.
- Τουμάσης, Μ. (2002). *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα: Gutenberg.