

ΜΟΥΣΙΚΗ & ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΜΟΥΣΙΚΗ ΣΥΝΘΕΣΗ ΒΑΣΙΣΜΕΝΗ ΣΤΗΝ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ
FIBONACCI

Θωμάς Μπουλούσης & Χρήστος Παπαχρήστου

Επιβλέπουσα καθηγήτρια: Χατσοπούλου Παναγιώτα

1^ο Γυμνάσιο Πεύκων Θεσσαλονίκης

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο βασικός στόχος αυτής της εργασίας είναι η ανάδειξη της σχέσης των μαθηματικών με τη μουσική με τη δημιουργία μιας πρωτότυπης μουσικής σύνθεσης για πιάνο βασισμένη στην ακολουθία Fibonacci. Εξετάστηκε ο τρόπος δημιουργίας της ακολουθίας και η σχέση της με τη χρυσή τομή. Παρουσιάστηκαν τα βήματα και η διαδικασία της σύνθεσης του μουσικού έργου το οποίο επισυνάπτεται.

Εισαγωγή – τι είναι η ακολουθία Fibonacci

Η ακολουθία Fibonacci πήρε το όνομά της από τον Ιταλό μαθηματικό Λεονάρντο της Πίζας, γνωστό και ως Fibonacci, που έζησε από το 1175 έως το 1250 μ.Χ. περίπου. Η ακολουθία πρωτοπαρουσιάστηκε το 1202 στο βιβλίο του με τίτλο «Liber Abaci» με το οποίο την εισήγαγε στα μαθηματικά της δυτικής Ευρώπης.

Στην ακολουθία Fibonacci, κάθε αριθμός είναι πάντοτε το άθροισμα των δύο προηγούμενων. Η ακολουθία ορίζεται από τον εξής τύπο: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, με 'n' τη σειρά του αριθμού στην ακολουθία. Οι δύο πρώτοι αριθμοί στην ακολουθία Fibonacci είναι είτε 1 και 1, είτε 0 και 1, ανάλογα με το επιλεγμένο σημείο εκκίνησης της ακολουθίας, και κάθε επόμενος αριθμός είναι το άθροισμα των προηγούμενων δύο. Επίσης, η ακολουθία μπορεί να επεκταθεί και στους αρνητικούς αριθμούς.

Στην ακολουθία Fibonacci οι πρώτοι 22 αριθμοί είναι οι εξής:

F0	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10	F11
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

F12	F13	F14	F15	F16	F17	F18	F19	F20	F21	F22
144	233	377	610	987	1597	2584	4181	6765	10946	17711

Οι αριθμοί Fibonacci εμφανίζονται αρκετά συχνά στα μαθηματικά και έχουν εφαρμογές σε πολλές επιστήμες. Είναι όμως αξιοσημείωτο το πόσο συχνά συναντώνται στη φύση, όπως στη διάταξη των φύλλων στα φυτά, στο μοτίβο των πετάλων στα λουλούδια, στα στρώματα του φλοιού ενός ανανά, στο μοτίβο μιας κυψέλης μελισσών ή ακόμη και ενός κυττάρου.

Η Χρυσή Τομή

Δύο ποσότητες έχουν αναλογία χρυσής τομής όταν ο λόγος του αθροίσματος τους προς τη μεγαλύτερη ποσότητα είναι ίσος με το λόγο της μεγαλύτερης ποσότητας προς τη μικρότερη. Η χρυσή τομή αναφέρεται επίσης και ως χρυσός λόγος, θεϊκή αναλογία ή απλά «φ», προς τιμήν του αρχαίου γλύπτη Φειδία, ενώ για τους αρχαίους Έλληνες αποτελούσε το «δόγμα της ωραιότητας». Ο υπολογισμός της χρυσής τομής βασίζεται στην αναλογία 8:13 και στη χρήση του αριθμού $\varphi=1,618$. Η χρυσή τομή χρησιμοποιείται για την άρτια δόμηση μιας σύνθεσης και εφαρμόστηκε από καλλιτέχνες όπως ο Λεονάρντο ντα Βίντσι και ο Μιχαήλ Άγγελος και μαθηματικούς όπως ο Ευκλείδης και ο Fibonacci. Η ακολουθία Fibonacci προσεγγίζει την χρυσή τομή. Αν διαιρέσουμε δύο οποιουδήποτε διαδοχικούς αριθμούς της ακολουθίας (κάθε αριθμός προς τον προηγούμενό του) θα βρούμε τον αριθμό «φ».

Διαδικασία σύνθεσης μουσικής χρησιμοποιώντας την ακολουθία Fibonacci

Οι αριθμοί της ακολουθίας Fibonacci έχουν εφαρμογή στις βασικές πτυχές της κλασικής μουσικής, όπως στις μουσικές κλίμακες. Οι μουσικές κλίμακες της κλασικής μουσικής αποτελούνται από 8 βαθμίδες (F6 της ακολουθίας Fibonacci), ενώ σε κάθε ολοκληρωμένη μουσική κλίμακα (οκτάβα) υπάρχουν συνολικά 13 νότες (F7 της ακολουθίας Fibonacci). Η 3η και η 5η βαθμίδα πάνω από κάθε νότα της μουσικής κλίμακας δημιουργούν τις συγχορδίες και τα αρπίσματα της κλασικής μουσικής (F4 και F5 της ακολουθίας Fibonacci).

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι να συνθέσει κανείς μουσική με την ακολουθία Fibonacci. Ο τρόπος που χρησιμοποιήθηκε στη δική μας περίπτωση είναι ο εξής:

Επιλέξαμε τη Λα μείζονα κλίμακα ως τονικότητα της σύνθεσης. Η νότα Λα επιλέχθηκε επειδή η διεθνής ονομασία της είναι το γράμμα «Α», η αρχή του αλφάβητου, και χρησιμοποιείται ως η βασική νότα στο κούρδισμα της ορχήστρας. Επίσης, η νότα Λα είναι η χαμηλότερη νότα στο πιάνο.

Συμβολίσαμε κάθε νότα της Λα μείζονας κλίμακας με έναν αριθμό από το 1 έως το 8, όσες δηλαδή είναι και οι βαθμίδες της κλίμακας:



Επειδή όμως στην ακολουθία Fibonacci εμφανίζονται και τα ψηφία 0 και 9, προεκτείναμε τη Λα μείζονα κλίμακα μία νότα πριν και μία νότα μετά ως εξής:



Χρησιμοποιήσαμε την ακολουθία Fibonacci μέχρι τον αριθμό 17711 (F22 της ακολουθίας), επειδή το τελευταίο ψηφίο αυτού του αριθμού είναι το ψηφίο 1 και αντιστοιχεί στη νότα Λα που καθορίζει την τονικότητα της σύνθεσής μας. Οι αριθμοί που χρησιμοποιήσαμε είναι οι εξής: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711. Για κάθε ψηφίο των αριθμών αυτών της ακολουθίας χρησιμοποιήσαμε την αντίστοιχη νότα. Δηλαδή, για τον αριθμό π.χ. 13 της ακολουθίας χρησιμοποιήσαμε τις νότες που αντιστοιχούν στο ψηφίο 1 και στο ψηφίο 3, ενώ για τον αριθμό π.χ. 21 της ακολουθίας χρησιμοποιήσαμε τις νότες που αντιστοιχούν στο ψηφίο 2 και στο ψηφίο 1 κ.ο.κ.

Στη συνέχεια εναρμονίσαμε τη μελωδία που προέκυψε ακολουθώντας τους κανόνες της κλασικής αρμονίας της μουσικής. Ορίσαμε ως ταχύτητα εκτέλεσης του μουσικού έργου τα 84,05 bpm που είναι περίπου 50 φορές ο αριθμός «φ». Η πρωτότυπη μουσική σύνθεση που δημιουργήσαμε είναι η παρακάτω:

Έργο για πιάνο
 βασισμένο στην ακολουθία Fibonacci
 Νοέμβριος 2018

Συνθέτης: Θωμάς Μπουλούσης

Andante ♩ = 84.05 (≈50φ)

1 1 2 3 5 8 1 3 2 1 3 4 5 5 8 9
mp *f*
 I III VI IV I V

5 1 4 4 2 3 3 3 7 7 6 1 0 9 8 7 1
mf *f*
 I III IV VI

9 5 9 7 2 5 8 4 4 1 8 1 6 7 6 5 1
f
 V I IV I II I

13 0 9 4 6 1 7 7 1 1
ff *mf*
 II V I